

Stanisław NOGA¹

DRGANIA GIĘTNE W PŁASZCZYŹNIE KÓŁ MODELOWANYCH UKŁADAMI PIERŚCIENIOWYMI Z WARSTWĄ SPRĘŻYSTĄ

W pracy omówiono drgania giętne w płaszczyźnie kół modelowanych układami pierścieniowymi z podłożem sprężystym typu Winklera. Zaprezentowano równania drgań własnych modeli pierścieni Timoshenki i Bernoulliego z warstwą sprężystą typu Winklera. W równaniach uwzględniono zaproponowany trzyparametrowy model warstwy sprężystej. Następnie wyprowadzono równanie częstości własnych wymienionych modeli oraz podano równanie form własnych. Zasadnicza część pracy dotyczy oceny wpływu głębokości pierścienia na wyniki rozwiązań analitycznych otrzymanych z proponowanych modeli. W procesie dostrajania współczynników modeli analitycznych wykorzystano wyniki rozwiązań numerycznych opartych na metodzie elementów skończonych. Otrzymane wyniki symulacji zweryfikowano doświadczalnie na wybranych obiektach. Ustalono przypadki pierścieni, dla których korzystne jest stosowanie zaproponowanych modeli analitycznych.

Słowa kluczowe: drgania giętne w płaszczyźnie, podłoże sprężyste Winklera

1. Wprowadzenie

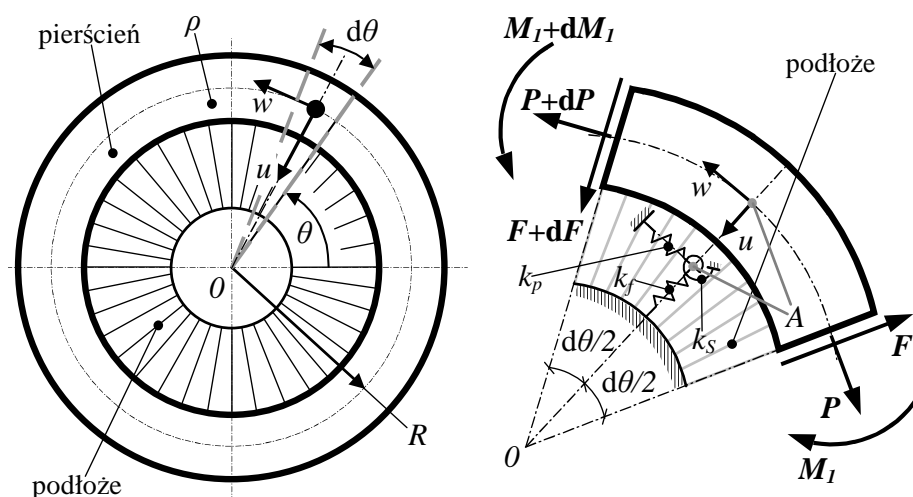
Problematyka modelowania drgań układów kołowo-symetrycznych układami pierścieniowymi z warstwą sprężystą jest przedmiotem zainteresowania wielu badaczy i ośrodków badawczo-rozwojowych [1-7]. Wynika to z faktu, że w przypadku analizy zagadnień drgań giętnych w płaszczyźnie układów typu koła kolejowe i zębate korzystnie jest stosować wymienione analityczne modele pierścieniowe z warstwą sprężystą [2, 4]. Podstawy teoretyczne dotyczące analizy i pomiarów drgań układów ciągłych z uwzględnieniem metody elementów skończonych (MES) omówiono w pracy [8]. W publikacjach [5, 7] rozważano przydatność zaproponowanych modeli analitycznych w symulacji drgań giętnych w płaszczyźnie kół kolejowych i kół z ogumieniem pełnym. Artykuł [1] dotyczy z kolei analizy drgań giętnych kół samochodowych. W pracach [2, 4] omówiono drgania giętne w płaszczyźnie kół zębatach, stosując modele analityczne i numeryczne MES. W publikacji [3] analizowano przydatność modelu analitycznego pierścienia cienkiego z trzyparametrową warstwą sprężystą w procesie symulacji

¹ Autor do korespondencji/corresponding author: Stanisław Noga, Politechnika Rzeszowska, al. Powstańców Warszawy 12, 35-959 Rzeszów, Polska, tel.: (17) 8651639, e-mail: noga@prz.edu.pl

drgań układów kołowo-symetrycznych. Podobny problem, odnoszący się do modelu tzw. pierścienia grubego, dyskutowano w referacie [6]. W pracach [2, 4], omówiono podstawy teoretyczne dotyczące równań drgań giętych w płaszczyźnie układów pierścieni cienkich (teoria Bernoulliego) i grubych (teoria Timoshenki) z trzyparametrową warstwą sprężystą typu Winklera. W niniejszej pracy omówiono drgania gięte w płaszczyźnie kół modelowanych układami pierścieniowymi z podłożem sprężystym. Zasadnicza część pracy dotyczy oceny wpływu głębokości pierścienia na wyniki rozwiązań otrzymanych z proponowanych modeli analitycznych. W procesie badawczym wykorzystano rezultaty badań doświadczalnych i wyniki rozwiązań MES.

2. Sformułowanie zagadnienia

Model mechaniczny rozważanych układów zawiera płaski pierścień kołowo-symetryczny współpracujący z trzyparametrowym podłożem sprężystym typu Winklera [2, 4]. W rozważaniach teoretycznych założono prostokątny jednorodny przekrój poprzeczny pierścienia i podłoża. Przyjmuje się, że pierścień i podłoże stanowią układ doskonale sprężysty, a R to promień linii środkowej pierścienia.



Rys. 1. Model układu pierścienia z warstwą sprężystą Winklera

Fig. 1. Physical model of a ring with Winkler foundation

Zakłada się, że nieskończenie mały element pierścienia (rys. 1.) wyznaczony przez kąt θ przemieszcza się w kierunku promieniowym $u(\theta, t)$ i obwodowym $w(\theta, t)$. W modelu matematycznym podłoża uwzględnia się dodatkowo przemieszczenie kątowe w płaszczyźnie wynikające z obrotu w płaszczyźnie przekroju poprzecznego pierścienia podczas deformacji [2, 4]. Przyjmuje się małe

przemieszczenia na wymienionych kierunkach. W proponowanym modelu matematycznym podłoża współczynniki k_f i k_p reprezentują sztywność promieniową i obwodową podłoża, a trzeci współczynnik k_s uwzględnia sztywność obrotową podłoża, ze względu na wspomniany obrót przekrojów poprzecznych pierścienia w czasie drgań giętych w płaszczyźnie. W przypadku gdy rozpatrywany jest tzw. pierścień gruby stosuje się teorię Timoshenki [2], a równanie drgań własnych giętych w płaszczyźnie układu, w funkcji przemieszczenia promieniowego przyjmuje formę [2, 4]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^6 u}{\partial \theta^6} + \left(2 - k_f \frac{R^2}{kAG} - k_s \frac{R^2}{EI_1} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4} + \left(1 + k_p \frac{R^2}{kAG} - 2k_s \frac{R^2}{EI_1} + k_f k_s \frac{R^4}{kAGEI_1} + \right. \\ & \left. + k_f \frac{R^4}{EI_1} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \left(k_s \frac{R^2}{EI_1} + k_p k_s \frac{R^4}{kAGEI_1} + k_p \frac{R^4}{EI_1} \right) u - \left(\frac{\rho R^2}{E} + \frac{\rho R^2}{kG} \right) \frac{\partial^6 u}{\partial \theta^4 \partial t^2} + \\ & + \frac{\rho^2 R^4}{kGE} \frac{\partial^6 u}{\partial \theta^2 \partial t^4} + \left(-2 \frac{\rho R^2}{E} + k_f \frac{\rho R^4}{kAGE} + \frac{\rho R^2}{kG} + k_s \frac{\rho R^4}{kGEI_1} + \frac{\rho AR^4}{EI_1} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial \theta^2 \partial t^2} + \\ & - \frac{\rho^2 R^4}{kGE} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - \left(\frac{\rho R^2}{E} + k_p \frac{\rho R^4}{kAGE} + k_s \frac{\rho R^4}{kGEI_1} + \frac{\rho AR^4}{EI_1} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie: E – moduł Younga,
 G – moduł Kirchhoffa,
 I_1 – geometryczny moment bezwładności przekroju poprzecznego pierścienia,
 ρ – gęstość masy pierścienia,
 A – pole przekroju poprzecznego pierścienia,
 k – współczynnik kształtu przekroju.

W przypadku tzw. pierścienia cienkiego stosuje się teorię Bernoulliego i równanie (1) przyjmuje postać [2, 4]:

$$\begin{aligned} & \frac{EI_1}{R^3} \left(\frac{\partial^6 u}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) - \frac{k_s}{R} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + u \right) + \left(k_f \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - k_p u \right) R + \\ & + \rho AR \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - u \right) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Warto zauważyć, że równanie (2) ma znacznie prostszą postać niż zależność (1). Wynika to z faktu, że w przypadku pierścieni cienkich, przy formułowaniu równań drgań giętych w płaszczyźnie pomija się wpływ odkształcenia postaciowego ($k = 0$) i bezwładności obrotowej pierścienia [2].

3. Rozwiązania teoretyczne drgań własnych

Rozwiązania ogólnego równań (1) i (2) poszukuje się w postaci:

$$u(\theta, t) = U(\theta)e^{i\omega t} \quad (3)$$

gdzie: ω – częstość własna,

$i = \sqrt{-1}$ – jednostka urojona.

Po podstawieniu rozwiązania (3) do równania (1) otrzymuje się zależność:

$$\begin{aligned} & \frac{d^6 U}{d\theta^6} + \left(2 - b_0 k_f - k_s \frac{a_0}{R^2}\right) \frac{d^4 U}{d\theta^4} + \left(1 + b_0 k_p - 2k_s \frac{a_0}{R^2} + k_f k_s \times \right. \\ & \times \frac{h_0}{\rho I_1} + k_f a_0 \left. \right) \frac{d^2 U}{d\theta^2} - \left(k_s \frac{a_0}{R^2} + k_p k_s \frac{h_0}{\rho I_1} + k_p a_0\right) U + (c_0 + d_0) \times \\ & \times \omega^2 \frac{d^4 U}{d\theta^4} + c_0 d_0 \omega^4 \frac{d^2 U}{d\theta^2} - c_0 d_0 \omega^4 U - \left(-2c_0 + k_f h_0 + d_0 + k_s \frac{h_0 A}{I_1} + \right. \\ & \left. + \rho A a_0\right) \omega^2 \frac{d^2 U}{d\theta^2} + \left(c_0 + k_p h_0 + k_s \frac{h_0 A}{I_1} + \rho A a_0\right) \omega^2 U = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie:

$$a_0 = \frac{R^4}{EI_1}, \quad b_0 = \frac{R^2}{kAG}, \quad c_0 = \frac{\rho R^2}{E}, \quad d_0 = \frac{\rho R^2}{kG}, \quad h_0 = \frac{\rho R^4}{kEAG} \quad (5)$$

W przypadku podstawienia równania (3) do wzoru (2):

$$\begin{aligned} & \frac{d^6 U}{d\theta^6} + (2 - h_1) \frac{d^4 U}{d\theta^4} + (1 - 2h_1 + a_1) \frac{d^2 U}{d\theta^2} - (c_1 + h_1) U + \\ & - \omega^2 b_1 \left(\frac{d^2 U}{d\theta^2} - U \right) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie:

$$a_1 = \frac{k_f R^4}{EI_1}, \quad b_1 = \frac{\rho AR^4}{EI_1}, \quad c_1 = \frac{k R^4}{EI_1}, \quad h_1 = \frac{k_s R^2}{EI_1} \quad (7)$$

Rozwiązanie ogólne równań (4) i (6) jest przewidywane w postaci [2, 8]:

$$U(\theta) = \sum_{j=1}^3 C_{jn} \sin(n\theta + \varphi_{jn}), \quad n = 2, 3, \dots \quad (8)$$

gdzie: C_{jn} , φ_{jn} – stałe.

Po podstawieniu równania (8) do równań (4) i (6) otrzymuje się tzw. równania częstości. W przypadku równania (4) równanie częstości przyjmuje formę:

$$\begin{aligned} & -c_0 d_0 (n^2 + 1) \omega_n^4 + \left[(c_0 + d_0) n^4 + \left(-2c_0 + k_f h_0 + d_0 + k_s \frac{h_0 A}{I_1} + \rho A a_0 \right) \times \right. \\ & \times n^2 + \left. \left(c_0 + k_p h_0 + k_s \frac{h_0 A}{I_1} + \rho A a_0 \right) \right] \omega_n^2 - n^6 + \left(2 - b_0 k_f - k_s \frac{a_0}{R^2} \right) n^4 + \\ & - \left(1 + b_0 k_p - 2k_s \frac{a_0}{R^2} + k_f k_s \frac{h_0}{\rho I_1} + k_f a_0 \right) n^2 - \left(k_s \frac{a_0}{R^2} + \right. \\ & \left. + k_p k_s \frac{h_0}{\rho I_1} + k_p a_0 \right) = 0 \quad (9) \end{aligned}$$

Równanie (9) jest równaniem kwadratowym ze względu na ω_n^2 . Oznacza to, że każdemu n odpowiadają dwie wartości częstości własnych. Niższe wartości odnoszą się do częstości własnych drgań giętych w płaszczyźnie [2, 4]. W przypadku równania (6) równanie częstości przyjmuje postać:

$$\omega_n^2 = \frac{n^6 - (2 - h_1) n^4 + (1 - 2h_1 + a_1) n^2 + (c_1 + h_1)}{b_1 (n^2 + 1)}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (10)$$

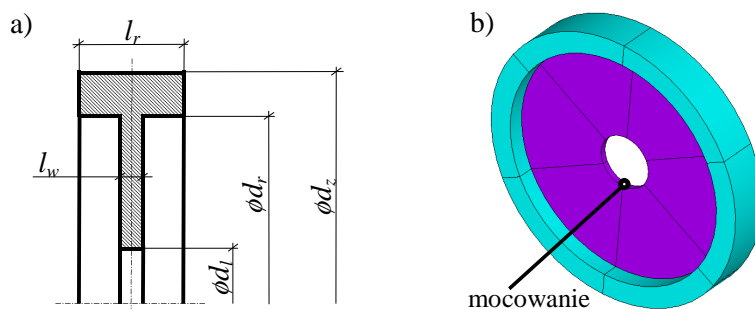
Istnieje szczególny przypadek rozwiązania równań (9) i (10). Mianowicie po podstawieniu do wymienionych równań $n = 1$, otrzymuje się oscylacje związane tylko z przemieszczeniem w płaszczyźnie pierścienia, bez jego deformacji (deformuje się tylko warstwa sprężysta). Dla dowolnego $n > 1$ pierścień (gruby lub cienki) odkształca się zgodnie z równaniem [2, 4]:

$$u_n(\theta, t) = C_{jn} \sin(n\theta + \varphi_{jn}) e^{i\omega_n t} \quad (11)$$

przy czym stałe C_{jn} i φ_{jn} wyznacza się z warunków początkowych układu.

4. Modele MES układów pierścieniowych

W bieżącym rozdziale zostaną omówione modele MES rozważanych układów pierścieniowych. Modele te otrzymuje się z dyskretyzacji modelu ciągłego układu rzeczywistego. Analizie poddano obiekty o geometrii pokazanej na rys. 2. Rozważono sześć przypadków układów pierścieniowych. W tabeli 1. zamieszczono dane techniczne badanych układów, przy czym h to grubość pierścienia wzdłuż promienia, a ν – współczynnik Poissona. Pozostałe wielkości zdefiniowano na rys. 2. bądź w zależności (1). Każdy rozważany układ składa się z obrzeża modelowanego pierścieniem sprężystym oraz tarczy traktowanej jako masowe podłoże sprężyste.



Rys. 2. Model geometryczny rozważanych układów: a) wymiary geometryczne, b) widok modelu

Fig. 2. Geometrical model of a discussed systems: a) geometric dimensions, b) view of the model

Równania drgań własnych układu dyskretnego korzystnie jest zapisać w postaci macierzowej [2, 8]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (12)$$

gdzie: \mathbf{M} – macierz bezwładności w układzie globalnym,
 \mathbf{K} – macierz sztywności w układzie globalnym,
 $\ddot{\mathbf{u}}$ – wektor przyspieszeń węzłowych,
 \mathbf{u} – wektor przemieszczeń węzłowych.

Częstości drgań własnych w tym przypadku otrzymuje się, rozwiązując zagadnienie własne:

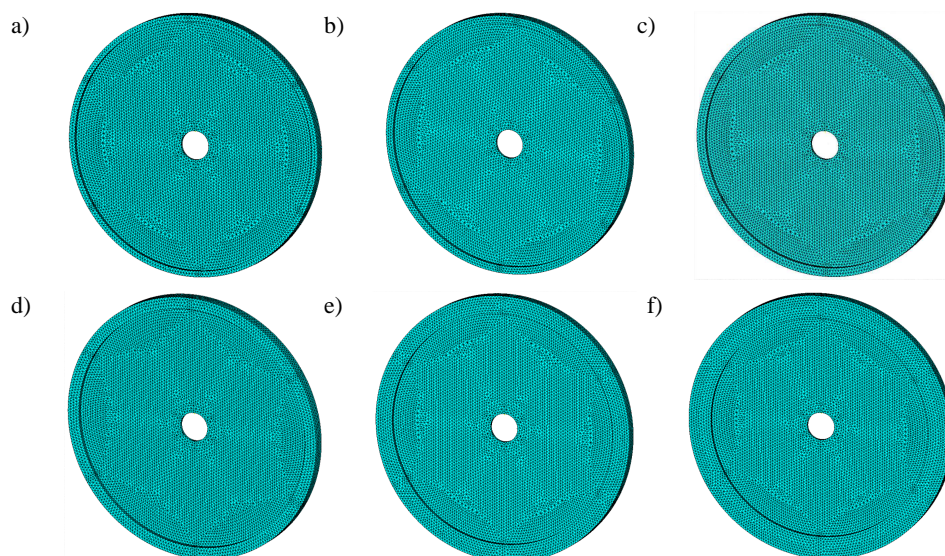
$$\left(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}\right)\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (13)$$

gdzie: ω – wspomniana wcześniej częstość drgań własnych,
 $\bar{\mathbf{u}}$ – wektor własny (postać drgań własnych).

Tabela 1. Dane techniczne analizowanych układów

Table 1. Parameters characterizing discussed systems

Lp.	d_z , m	d_w , m	h , m	ρ , kg/m ³	R , m	d_1 , m	l_r , m	l_w , m	E , Pa	ν
1	0,179	0,171	0,004	$7,85 \cdot 10^3$	0,0875	0,02	0,008	0,002	$2,1 \cdot 10^{11}$	0,28
2	0,180	0,170	0,005							
3	0,181	0,169	0,006							
4	0,183	0,167	0,008							
5	0,187	0,163	0,012							
6	0,191	0,159	0,016							



Rys. 3. Modele MES układów po rozwinięciu: a) model obiektu nr 1, b) model obiektu nr 2, c) model obiektu nr 3, d) model obiektu nr 4, e) model obiektu nr 5, f) model obiektu nr 6

Fig. 3. FE models of the systems after evaluation: a) model of the object no. 1, b) model of the object no. 2, c) model of the object no. 3, d) model of the object no. 4, e) model of the object no. 5, f) model of the object no. 6

W obliczeniach numerycznych do rozwiązania zagadnienia własnego (11) stosuje się metodę blokową Lanczosa [2, 8]. W pierwszej kolejności porównano wyniki rozwiązań analitycznych z rozwiązaniami numerycznymi MES. Następnie dla wybranych przypadków obiektów wyniki z modeli analitycznych i numerycznych odniesiono do rezultatów badań doświadczalnych. Jakość zaproponowanych modeli analitycznych i numerycznych MES ustala się, wyznaczając tzw. błąd względny częstości, określony zależnością [2]:

$$\varepsilon = (\omega^f - \omega^e) / \omega^e \times 100, \% \quad (14)$$

gdzie: ω^e – referencyjna wartość częstości własnej drgań giętnych,
 ω^f – wartość częstości własnej drgań z modelu.

Dla każdego rozważanego przypadku opracowano model MES w środowisku ANSYS APDL. W procesie nakładania siatki stosowano element czworosścienny dziesięciowęzłowy (solid187) o trzech stopniach swobody w każdym węźle. Przyjęto, że długość krawędzi elementu nie przekracza grubości tarczy modelującej podłoże sprężyste w danym układzie [2, 8]. Przy opracowywaniu modeli MES wykorzystano właściwości cyklicznej symetrii rozważanych obiektów. Każdy model MES stanowi jedną szóstą modelowanych układów. Na rysunku 3. pokazano modele MES analizowanych obiektów po rozwinięciu do procesu wizualizacji wyników obliczeń.

5. Analiza numeryczna

W niniejszym rozdziale omówiono wyniki rozwiązań analitycznych i numerycznych dla modeli analizowanych układów. Dla każdego przypadku modelu wyznaczono siedem pierwszych częstości drgań własnych giętnych w płaszczyźnie i odpowiadających im form własnych. Ze względu na to, że modele analityczne nie uwzględniają masy warstwy sprężystej, zadowalające rezultaty uzyskuje się przy zmianie masy pierścieni w modelach analitycznych układów. W tabeli 2. podano wartości współczynników zastępczej gęstości materiałowej pierścieni modeli analitycznych rozważanych obiektów, przy których uzyskano zadowalające wyniki. Wartości te wyznaczono w symulacji numerycznej dla modeli Timoshenki, a następnie wykorzystywano w modelach Bernoulliego. Podobnie, wartości współczynników k_f , k_p i k_s wyznaczono w symulacji numerycznej, przy czym aby uzyskać satysfakcjonujący wynik, dla każdego modelu analitycznego należało wyznaczyć osobny zbiór wartości współczynników.

Tabela 2. Współczynnik zastępczej gęstości materiałowej pierścieni

Table 2. Ring substitute mass density

Lp.	ρ_z , kg/m ³
1	94·10 ³
2	95·10 ³
3	95·10 ³
4	93·10 ³
5	885·10 ³
6	835·10 ³

W tabeli 3. podano wartości częstotliwości drgań własnych giętnych w płaszczyźnie, uzyskane z modeli MES analizowanych obiektów. Rezultaty te wykorzystano jako dane referencyjne do wyznaczenia współczynników ρ_z , k_f , k_p i k_s modeli analitycznych obiektów. W tabeli 4. pokazano wartości częstotliwości drgań własnych giętnych rozważanych układów oraz wartości współczynników k_f , k_p , k_s otrzymane z modeli Timoshenki (pierścienie grube).

Tabela 3. Częstotliwości własne rozważanych układów ω_n , Hz (rozwiązanie MES)Table 3. Natural frequencies of the considered systems ω_n , Hz (FE solutions)

Lp.	k_f , N/m ²	k_p , N/m ²	k_s , N/m	n							
				2	3	4	5	6	7	8	
1	-	-	-	11135	17854	22886	27355	31489	35385	39105	
2	-	-	-	10792	17195	21963	26186	30098	33808	37387	
3	-	-	-	10475	16603	21156	25195	28962	32573	36104	
4	-	-	-	9916	15597	19834	23645	27280	30863	34472	
5	-	-	-	9038	14141	18091	21833	25607	29518	33611	
6	-	-	-	8393	13199	17141	21084	25218	29594	34207	

Tabela 4. Częstotliwości własne rozważanych układów ω_n , Hz (model Timoshenki)Table 4. Natural frequencies of the considered systems ω_n , Hz (thick ring solution)

Lp.	k_f , N/m ²	k_p , N/m ²	k_s , N/m	n							
				2	3	4	5	6	7	8	
1	15·10 ⁹	6·10 ⁶	175·10 ⁸	11997	16304	20819	25454	30161	34911	39691	
2	17·10 ⁹	6·10 ⁶	13·10 ⁸	11520	15851	20378	25010	29702	34431	39183	
3	185·10 ⁹	6·10 ⁶	112·10 ⁸	11132	15510	20072	24723	29424	34155	38904	
4	224·10 ⁹	6·10 ⁶	18·10 ⁷	10561	14530	18681	22932	27243	31593	35972	
5	228·10 ⁹	6·10 ⁶	18·10 ⁷	9390	13469	17698	21996	26340	30722	35140	
6	223·10 ⁹	6·10 ⁶	16·10 ⁷	8602	12686	16916	21227	25613	30072	34605	

Tabela 5. zawiera wyniki (wartości częstotliwości drgań własnych giętnych oraz współczynników k_f , k_p , k_s) otrzymane z modeli Bernoulliego (pierścienie cienkie).

Kolejne tabele zawierają błędy częstości (12) wynikające z porównania otrzymanych rozwiązań analitycznych z rezultatami uzyskanymi z modeli MES układów, przy czym – jak wspomniano wcześniej – wyniki rozwiązań MES traktowano jako dane referencyjne. W tabeli 6. zamieszczono stosowne wartości błędów częstości wynikające z porównania wyników z modeli Timoshenki z wynikami z modeli MES. Otrzymane wartości błędów są dla rozważanych przypadków obiektów zadowalające (dla każdej częstości bezwzględne wartości błędów poniżej 91%). Jedynie w odniesieniu do pierwszego obiektu zauważa się dla dwóch częstości błąd powyżej 8%.

Tabela 5. Częstotliwości własne rozważanych układów ω_n , Hz (model Bernoulliego)Table 5. Natural frequencies of the considered systems ω_n , Hz (thin ring solution)

Lp.	k_f , N/m ²	k_p , N/m ²	k_s , N/m	n							
				2	3	4	5	6	7	8	
1	1405·10 ⁹	6·10 ⁶	235·10 ⁶	11890	16514	21359	26335	31404	36552	41774	
2	17·10 ⁹	6·10 ⁶	264·10 ⁶	11501	15824	20380	25092	29926	34870	39924	
3	195·10 ⁹	6·10 ⁶	292·10 ⁶	11183	15322	19709	24277	29000	33869	38888	
4	244·10 ⁹	6·10 ⁶	309·10 ⁶	10696	14367	18333	22565	27051	31792	36802	
5	301·10 ⁹	6·10 ⁶	314·10 ⁶	9733	12889	16503	20624	25275	30483	36275	
6	323·10 ⁹	6·10 ⁶	228·10 ⁶	8697	11289	14648	18931	24176	30393	37582	

Tabela 6. Błąd częstości ε_n , % (porównanie rozwiązań z modeli Timoshenki z wynikami MES)Table 6. Frequency error ε_n , % (comparison of the thick ring solution with the FE solutions)

Lp.	k_f , N/m ²	k_p , N/m ²	k_s , N/m	n							
				2	3	4	5	6	7	8	
1	15·10 ⁹	6·10 ⁶	175·10 ⁸	774	-868	-903	-695	-421	-134	15	
2	17·10 ⁹	6·10 ⁶	13·10 ⁸	674	-782	-722	-449	-131	184	48	
3	185·10 ⁹	6·10 ⁶	112·10 ⁸	627	-659	-513	-187	16	486	776	
4	224·10 ⁹	6·10 ⁶	18·10 ⁷	651	-684	-582	-302	-014	237	435	
5	228·10 ⁹	6·10 ⁶	18·10 ⁷	389	-475	-217	075	286	408	455	
6	223·10 ⁹	6·10 ⁶	16·10 ⁷	248	-389	-131	068	156	161	116	

W tabeli 7. zamieszczono wartości błędu częstości wynikające z porównania rezultatów z modeli Bernoulliego ze stosownymi rozwiązaniami MES. W tym przypadku zauważa się gorsze dopasowanie modeli obiektów nr 5 i 6. Wyniki dla obiektu nr 5 są dopuszczalne (dla dwóch częstości bezwzględna wartość błędu częstości mieści się w przedziale 8-9%). W przypadku obiektu nr 6 dla trzech częstości obserwuje się błąd (wartość bezwzględna) powyżej 10%, a dla jednej powyżej 9%, co nie jest do zaakceptowania.

Tabela 7. Błąd częstości ε_n , % (porównanie rozwiązań z modeli Bernoulliego z wynikami MES)Table 7. Frequency error ε_n , % (comparison of the thin ring solution with the FE solutions)

Lp.	k_f , N/m ²	k_p , N/m ²	k_s , N/m	n							
				2	3	4	5	6	7	8	
1	1405·10 ⁹	6·10 ⁶	235·10 ⁶	678	-751	-667	-373	-027	33	683	
2	17·10 ⁹	6·10 ⁶	264·10 ⁶	657	-797	-721	-418	-057	314	679	
3	195·10 ⁹	6·10 ⁶	292·10 ⁶	676	-772	-684	-364	013	398	771	
4	244·10 ⁹	6·10 ⁶	309·10 ⁶	787	-789	-757	-457	-084	301	676	
5	301·10 ⁹	6·10 ⁶	314·10 ⁶	769	-885	-878	-554	-13	327	792	
6	323·10 ⁹	6·10 ⁶	228·10 ⁶	362	-145	-145	-102	-413	27	986	

Analizując otrzymane rezultaty, zauważa się zadowalającą zgodność obu modeli analitycznych z wynikami MES dla pierwszych pięciu obiektów. Biorąc pod uwagę wpływ głębokości pierścieni h w relacji do promieni linii środkowej R , można zauważyć, że dla wartości parametru h/R poniżej 0,14 występuje zadowalająca zgodność obu modeli analitycznych z wynikami MES (obiekty nr 1-5).

6. Weryfikacja doświadczalna

Otrzymane w symulacji modele analityczne i numeryczne MES zweryfikowano badaniami doświadczalnymi.



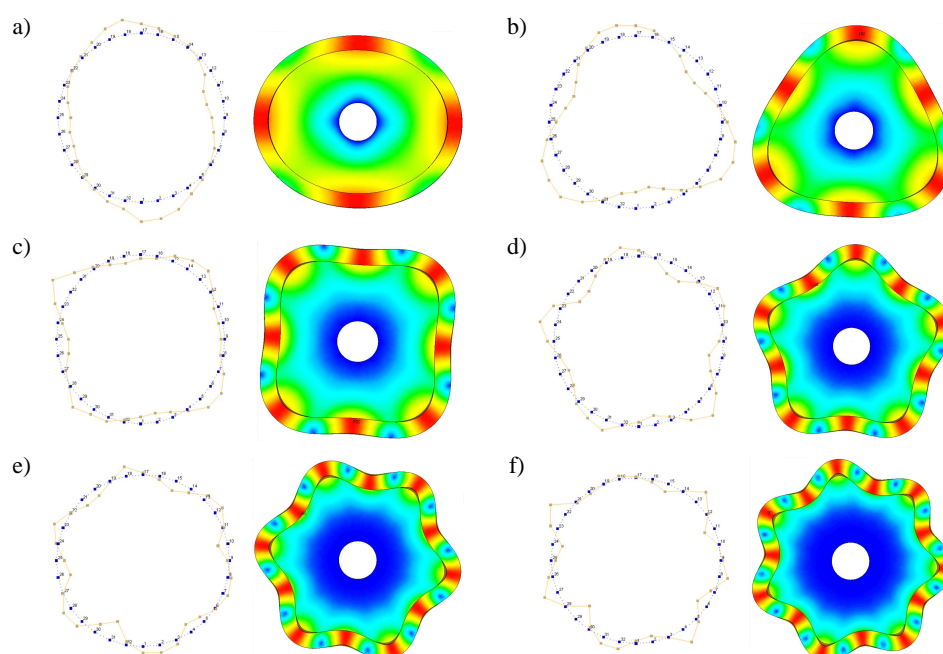
Rys. 4. Badania doświadczalne
Fig. 4. Experimental verification

Tabela 8. Wyniki badań eksperymentalnych

Table 8. Results of the experimental investigation

Lp.	n						
	2	3	4	5	6	7	8
Częstotliwości własne rozważanych obiektów ω_n , Hz (dane eksperymentalne)							
1	11732	17215	22934	27451	31482	35206	39488
6	8660	129438	168025	206181	252119	295506	341556
Błąd częstości ε_n , % (porównanie rozwiązań z modeli Timoshenki z wynikami eksperymentu)							
1	226	-529	-922	-728	-420	-084	052
6	-067	-199	067	296	159	176	132
Błąd częstości ε_n , % (porównanie rozwiązań z modeli Bernoulliego z wynikami eksperymentu)							
1	135	-407	-687	-407	-025	382	579
6	043	-1279	-1282	-818	-411	285	1003
Błąd częstości ε_n , % (porównanie rozwiązań MES z wynikami eksperymentu)							
1	-509	371	-021	-035	002	051	-097
6	-308	197	201	226	002	015	015

Eksperyment wykonano na obiektach nr 1 i 6 (tab. 1., rys. 2.). Dane techniczne materiału wykonanych próbek zawiera tab. 1. W badaniach wykorzystano system pomiarowy LMS, składający się z młotka modalnego PCB – model 08C03 ze stalową końcówką, czujnika przyspieszenia PCB – model 353B18, systemu archiwizacji danych LMS SCADA oraz modułu pomiarowego SCM-V4E. Eksperyment zaplanowano i wykonano tak, aby wzbudzić i zidentyfikować częstotliwości własne i odpowiadające im formy własne drgań giętnych w płaszczyźnie. Badane układy przymocowano połączeniem śrubowym do obiektu o znacznej masie i wymiarach gabarytowych (rys. 4.) Każdy badany obiekt pobudzano uderzeniem młotkiem modalnym w ten sam punkt. Odpowiedź układu mierzono w 32 punktach pomiarowych równo rozmieszczonych na obwodzie. Wartości wzbudzonych i zidentyfikowanych częstotliwości drgań własnych przedstawiono w tab. 8. Wartości te odniesiono do wyników wygenerowanych z modeli analitycznych i numerycznych MES badanych obiektów (tab. 1-5). W tabeli 8. pokazano także wartości błędu częstotliwości (12), odnoszące się do otrzymanych modeli analitycznych i numerycznych obiektów. Jak należało się spodziewać, najgorsze rezultaty uzyskano dla obiektu nr 6, porównując wyniki uzyskane z modelu Bernoulliego (pierścień cienki) z wynikami badań doświadczalnych.



Rys. 5. Postacie drgań własnych odpowiadające częstościom: a) ω_2 , b) ω_3 , c) ω_4 , d) ω_5 , e) ω_6 , f) ω_7

Fig. 5. Mode shapes related to the following frequencies: a) ω_2 , b) ω_3 , c) ω_4 , d) ω_5 , e) ω_6 , f) ω_7

Rezultaty te są nie do zaakceptowania. Dla tego obiektu współczynnik $h/R = 018$. Pozostałe wyniki są zadowalające. Godny zauważenia jest wysoki poziom dopasowania wyników z modeli MES układów do rezultatów badań doświadczalnych (dwa ostatnie wiersze w tab. 8.). Jak wcześniej wspomniano, wyniki z modeli MES wykorzystano jako dane referencyjne do dostrajania modeli analitycznych badanych obiektów. Na rysunku 5. pokazano sześć postaci drgań giętych w płaszczyźnie, odnoszących się do pierwszych sześciu częstości własnych, wyznaczonych w eksperymencie pomiarowym i z modelu MES dla pierwszego obiektu. Zauważa się znaczne podobieństwo kształtowe odpowiadających sobie form własnych.

7. Uwagi i wnioski

W pracy rozważano drgania gięte w płaszczyźnie, układów zawierających pierścień kołowy współpracujący z tarczą traktowaną jako podłoże sprężyste. Zaprezentowano modele analityczne drgań własnych pierścieni z warstwą sprężystą, opracowane na podstawie teorii pierścieni grubych (Timoshenki) i cienkich (Bernoulliego). W równaniach stosowano trzyparametrowy model warstwy sprężystej. Następnie omówiono zaproponowane modele MES tego typu układów. Wyniki rozwiązań MES wykorzystano do wyznaczenia współczynników modeli analitycznych omawianych układów. Z analizy otrzymanych rezultatów wynika, że dla wartości współczynnika $h/R < 014$ oba zaproponowane modele analityczne wykazują zadowalającą zgodność z wynikami z modeli MES. Otrzymane rozwiązania analityczne i numeryczne zweryfikowano badaniami doświadczalnymi dla dwóch reprezentatywnych obiektów. Prezentowane w pracy wyniki badań symulacyjnych i doświadczalnych potwierdzają celowość stosowania trzyparametrowego modelu warstwy sprężystej w modelach analitycznych. Ponadto warto zauważyć, że dla układów, w których współczynnik $h/R < 014$, wystarczające jest stosowanie w symulacji drgań modelu analitycznego pierścienia cienkiego (Bernoulliego), który charakteryzuje się znacznie prostszą formułą matematyczną w porównaniu z modelem pierścienia grubego.

Podziękowanie

Pracę poświęcam pamięci **Profesora Romana Bogacza**, mojego mentora i przyjaciela.

Literatura

- [1] Liu Z., Zhou F., Oertel C., Wei Y.: Three-dimensional vibration of a ring with a noncircular cross-section on an elastic foundation, PIME Part C: J. Mech. Eng. Sci., 232 (2017) 2381-2393.
- [2] Noga S.: Analityczne i numeryczne zagadnienia drgań układów z symetrią kołową, OW PRz, Rzeszów 2015.

- [3] Noga S.: Vibration analysis of a thin ring interacting with the annular plate treated as an elastic foundation, *J. Civil. Eng. Environ. Architecture*, 31 (2014) 131-138.
- [4] Noga S., Bogacz R., Markowski T.: Vibration analysis of a wheel composed of a ring and a wheel-plate modelled as a three-parameter elastic foundation, *J. Sound Vibration*, 333 (2014) 6706-6722.
- [5] Metrikine A., Tochilin M.: Steady-state vibrations of an elastic ring under a moving load, *J. Sound Vibration*, 232 (2000) 511-524.
- [6] Noga S., Markowski T.: Vibration analysis of a thick ring interacting with the disk treated as an elastic foundation, *Vibrations Physical System*, 26 (2014) 217-222.
- [7] Wang C., Ayalew B., Rhyne T., Cron S., Dailliez B.: Forced in-plane vibration of a thick ring on a unilateral elastic foundation, *J. Sound Vibration*, 380 (2016) 279-294.
- [8] De Silva C.: *Vibration and shock handbook*, Taylor & Francis, Boca Raton 2005.

IN-PLANE FLEXURAL VIBRATION OF WHEELS MODELLED BY RING SYSTEMS WITH ELASTIC FOUNDATION

S u m m a r y

This paper deals with the in-plane flexural vibration of wheels, modelled as circular ring systems with elastic foundation. Equations of motion of discussed systems achieved on the basis of the Bernoulli and Timoshenko theory are presented. In motion equations the three-parameter Winkler elastic layer is included. Then for each model the frequency equation is derived and the equation of normal modes is given. The main part of the paper concerns the evaluation of the ring depth impact on the results of analytical solutions, which were obtained from the proposed analytical models. In the tuning process, of the coefficients of analytical models, the results of solutions achieved from finite element computations were used. Obtained simulation results were verified experimentally on selected objects. The cases of ring systems for which it is preferred to use the proposed analytical models were established.

Keywords: in-plane flexural vibration, Winkler elastic foundation

DOI: 10.7862/rm.2018.42

Otrzymano/received: 10.10.2018

Zaakceptowano/accepted: 15.11.2018